3 ÁLGEBRA

El álgebra se vale de la aritmética y es, a su vez, importantísimo auxiliar suyo. En su lenguaje, claro y conciso, radica gran parte de su eficacia.

Al peculiar lenguaje algebraico se llegó de forma paulatina: egipcios, babilonios, árabes, hindúes y chinos resolvieron muchas situaciones de carácter algebraico, aunque utilizaron un lenguaje cercano al natural. Las ecuaciones se proponían del siguiente modo:

*¿Cuánto vale la **cosa** que si se triplica y se le añade diez, vale igual que el resultado de multiplicar la **cosa** por la **cosa**?*

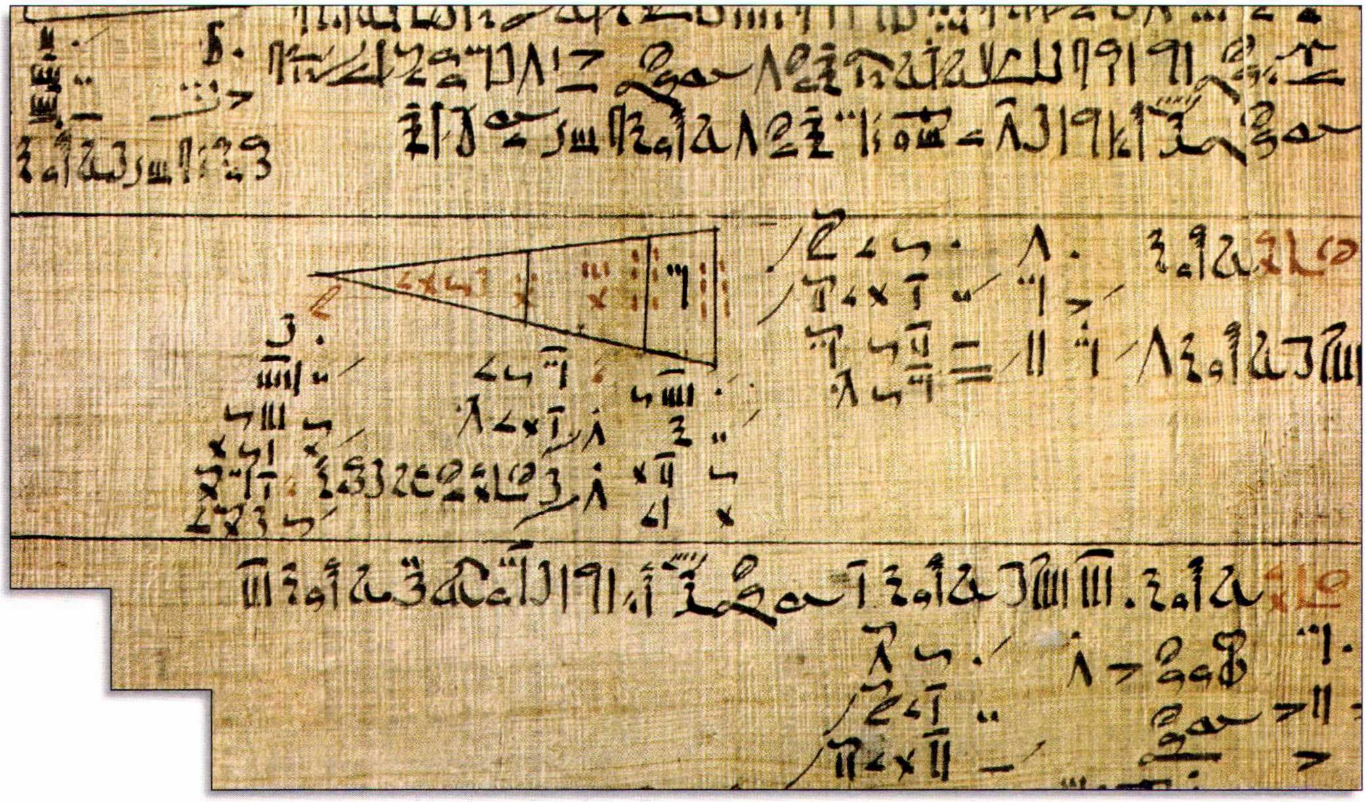
Más adelante simplificaron:

*Tres veces la **cosa** más diez es **cosa** por **cosa**.*

El camino para llegar a la sencilla expresión $3x + 10 = x^2$ fue muy largo.

El simbolismo algebraico irrumpió con toda su fuerza a partir del siglo XVI. Las demás ciencias presionaban, de manera indirecta, para que aumentara la eficiencia de las matemáticas. La notación algebraica que ahora utilizamos fue propuesta por el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650).

Papiro de Rhind (1650 a.C.)



REFLEXIONA Y RESUELVE

Puñado de almendras

Tres amigos, Antonio, Juan y Pablo, fueron con sus tres hijos, Julio, José y Luis, a un almacén de frutos secos.

Ante un saco de almendras, el dueño les dijo:

— Coged las que queráis.

Cada uno de los seis metió la mano en el saco un número n de veces y, cada vez, se llevó n almendras (es decir, si uno de ellos metió la mano en el saco 9 veces, cada vez cogió 9 almendras, y, por tanto, se llevó 81 almendras). Además, cada padre cogió, en total, 45 almendras más que su hijo.

Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, y Julio, 15 más que Pablo.

- *¿Cómo se llama el hijo de Antonio?*
- *¿Y el de Juan?*
- *¿Cuántas almendras se llevaron entre todos?*

Las claves para resolver este problema son:

a) Cada persona se lleva un número de almendras que es cuadrado perfecto:

x puñados $\to$ x^2 almendras

y puñados $\to$ y^2 almendras

b) La diferencia de almendras que cogen cada padre y su hijo es de 45.

$$x^2 - y^2 = 45 \;\to\; (x + y)(x - y) = 45$$

(Recuerda: *suma por diferencia* es igual a *diferencia de cuadrados*).

Tenemos, por tanto, el producto de dos números naturales igual a 45. Esto solo ocurre en los siguientes casos: 9×5; 15×3; 45×1

- 1er caso: 9×5

$(x + y)(x - y) = 45$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ x - y = 5 \end{array}\right\}$$

Sumando: $2x = 14 \;\to\; x = 7$

Restando: $2y = 4 \;\to\; y = 2$

Solución: $x = 7$, $y = 2$

■ Interpreta esta solución, estudia los demás casos y resuelve, finalmente, el problema completo.

Sin necesidad del álgebra

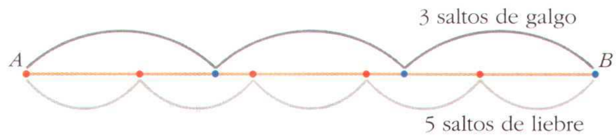
Un galgo persigue a una liebre.

La liebre lleva 30 de sus saltos de ventaja al galgo. Mientras el galgo da dos saltos, la liebre da tres. Tres saltos del galgo equivalen a cinco de la liebre.

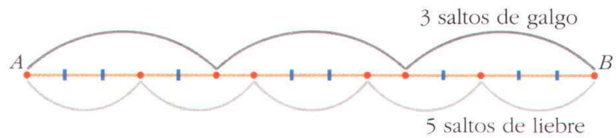
¿Cuántos saltos dará cada uno hasta el momento de la captura?

Este problema parece difícil. Sin embargo, si realizamos una buena representación y elegimos adecuadamente la unidad, puede ser muy sencillo. Veámoslo.

Se nos dice que tres saltos de galgo coinciden con cinco saltos de liebre. Lo representamos:



Parece razonable tomar como unidad de longitud, u, la quinceava parte del segmento AB.



Resuelve el problema razonadamente sobre esta gráfica:

1 salto de galgo = $5u$

1 salto de liebre = $3u$

"Mientras el galgo da dos saltos, la liebre da tres" significa:

galgo $\to$ $2 \cdot 5u = 10u$

liebre $\to$ $3 \cdot 3u = 9u$

El galgo avanza $1u$ más que la liebre.

■ Prosigue así hasta terminar el problema.

3.1 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

La divisibilidad en los polinomios

La divisibilidad en el conjunto de polinomios es muy similar a la divisibilidad entre números enteros.

- Un polinomio $P(x)$ es **divisible** por otro polinomio $Q(x)$ cuando el cociente $P(x) : Q(x)$ es exacto. En tal caso, $P(x) : Q(x) = C(x)$. Y, por tanto, $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$.

  Los polinomios $Q(x)$ y $C(x)$ se llaman **divisores** de $P(x)$.

  Por ejemplo: $(3x^3 - 14x^2 + 4x + 3) : (3x + 1) = x^2 - 5x + 3$

  Por tanto: $3x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = (3x + 1) \cdot (x^2 - 5x + 3)$

- Un polinomio se dice que es **irreducible** cuando ningún polinomio de grado inferior es divisor suyo.

  Son polinomios irreducibles

  — los de primer grado: x, $2x - 1$, $\frac{x}{2} + 3$, ...

  — los de segundo grado sin raíces: $x^2 + 1$, $2x^2 - 3x + 5$, ...

OBSERVA

Los polinomios irreducibles desempeñan, en la divisibilidad entre polinomios, el mismo papel que los números primos en la divisibilidad entre números enteros.

- Un polinomio de segundo grado con raíces a y b se puede descomponer en forma de producto: $k(x - a)(x - b)$.

  Por ejemplo, el polinomio $5x^2 + 5x - 60$ tiene dos raíces: $x = 3$, $x = -4$ (compruébalo resolviendo la ecuación $5x^2 + 5x - 60 = 0$).

  Por tanto:

  $$5x^2 + 5x - 60 = 5(x - 3)(x + 4)$$

- Cualquier otro polinomio se puede descomponer en producto de polinomios irreducibles.

  Por ejemplo:

  $3x^4 + 3x^3 - 33x^2 + 3x - 36 = 3(x - 3)(x + 4)(x^2 + 1)$

  o bien, $= (3x - 9)(x + 4)(x^2 + 1)$

  o bien, $= (x - 3)(6x + 24)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$

  ...

OBSERVA

La descomposición de un polinomio en polinomios irreducibles es similar a la descomposición de un número en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 3x^3 - 33x^2 + 3x - 36 & x - 3 \\ 3x^3 + 12x^2 + 3x + 12 & x + 4 \\ 3x^2 + 3 & x^2 + 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

En este ejemplo vemos que hay muchas posibles descomposiciones. Sin embargo, todas ellas son, esencialmente, la misma, pues los polinomios que intervienen en ellas son, respectivamente, *semejantes*.

$x - 3$ es *semejante* a $3x - 9$ pues $3x - 9 = 3(x - 3)$

$x + 4$ es *semejante* a $6x + 24$ pues $6x + 24 = 6(x + 4)$

$x^2 + 1$ es *semejante* a $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ pues $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$

Por tanto, la descomposición de un polinomio en factores es, *esencialmente*, única.

Procedimiento para factorizar un polinomio

REFLEXIONA

En la página anterior hemos visto que todo polinomio se puede factorizar como producto de polinomios irreducibles. Sin embargo, una cosa es que *se pueda* y otra que *sepamos* hacerlo.

Vamos a ver en qué casos sabemos descomponer un polinomio en factores y de qué procedimientos nos podemos valer.

- Siempre que se pueda, sacaremos la x factor común.
- La regla de Ruffini nos permite localizar con eficacia las raíces enteras de un polinomio, pues:
  - — Si los coeficientes de $P(x)$ son números enteros, las raíces enteras de $P(x)$ son divisores de su término independiente.
  - — Si $P(a) = 0$, entonces $P(x) = (x - a)Q(x)$.
- Si un polinomio de grado mayor que 2 no tiene raíces enteras, es poco probable que podamos descomponerlo con los conocimientos que poseemos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Descomponer en factores irreducibles el siguiente polinomio:*

$x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2$

$x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2 = x^2(x^4 - 15x^2 - 42x - 40)$

Ya hemos extraído el factor x dos veces. Ahora busquemos las raíces enteras de $x^4 - 15x^2 - 42x - 40$ aplicando la regla de Ruffini y probando con los divisores de 40 (±1, ±2, ±4, ±5, ±8, ±10, ±20, ±40).

Comprobamos que 1, –1, 2 no son raíces (hazlo).

	1	0	–15	–42	–40
–2		–2	4	22	40
	1	–2	–11	–20	0

–2 sí es raíz. Por tanto:

$x^4 - 15x^2 - 42x - 40 =$

$= (x + 2)(x^3 - 2x^2 - 11x - 20)$

Buscamos las raíces enteras de $x^3 - 2x^2 - 11x - 20$. Probamos con los divisores de 20 (ya no hemos de probar con 1, –1 y 2, pero sí con –2).

Comprobamos que –2 no es raíz (hazlo).

	1	–2	–11	–20
5		5	15	20
	1	3	4	0

5 sí es raíz. Por tanto:

$x^3 - 2x^2 - 11x - 20 =$

$= (x - 5)(x^2 + 3x + 4)$

Como el factor que queda es de segundo grado, comprobamos si tiene raíces resolviendo la ecuación correspondiente:

$x^2 + 3x + 4 = 0$ no tiene raíces. Por tanto, $x^2 + 3x + 4$ es irreducible.

La descomposición queda así:

$x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2 = x^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (x^2 + 3x + 4)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Descompón factorialmente los siguientes polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

2. a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

3. Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces suyas.

3.2 FRACCIONES ALGEBRAICAS

Las fracciones entre polinomios se comportan de forma muy parecida a las fracciones numéricas.

Observa en las siguientes definiciones y procedimientos la gran similitud que existe entre ambas.

POR QUÉ SE UTILIZA LA x

Lee el siguiente párrafo extraído de una conocida novela actual:

"Omar Jayyam, poeta, astrónomo, matemático persa del siglo XI, en un libro sobre álgebra, para designar la incógnita utiliza el término árabe *shay*, que significa *cosa*. Esta palabra, escrita *xay* en las obras científicas españolas, ha sido reemplazada progresivamente por su primera letra, x, convertida en el símbolo universal de la incógnita".

Samarcanda. Amin Maalouf.

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios, $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Son fracciones algebraicas:

$$\frac{x}{3x^2-5};\quad \frac{1}{x+1};\quad \frac{x^2-3x+2}{x^3+5x-6};\quad \frac{3x-5}{7}=\frac{3}{7}x-\frac{5}{7};\quad \frac{11}{1}=11$$

Simplificación

Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica se pueden dividir por un mismo polinomio (de grado mayor o igual que 1), al hacerlo se simplifica la fracción.

Si dividimos numerador y denominador por su máx.c.d., se obtiene una **fracción irreducible**.

$$\text{máx.c.d. } [P(x), Q(x)] = D(x);\quad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)\cdot D(x)}{Q_1(x)\cdot D(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

RECUERDA

Para obtener el máximo común divisor (máx.c.d.) de dos polinomios, se descomponen factorialmente y se toman los factores que coincidan en ambos con los menores exponentes que presentan.

Por ejemplo:

$$\frac{3x^3-2x^2+5x}{x^2-3x}=\frac{(3x^2-2x+5)x}{(x-3)x}=\frac{3x^2-2x+5}{x-3}$$

En este caso hemos sacado x factor común en el numerador y en el denominador, y hemos dividido por él.

Fracciones equivalentes

Dos fracciones algebraicas son equivalentes si:

- Una de ellas se obtiene simplificando la otra.
- O bien, ambas, al simplificarse, dan lugar a la misma fracción.

Si dos fracciones, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{M(x)}{N(x)}$, son equivalentes, entonces "los productos cruzados" coinciden:

$$P(x)\cdot N(x) = Q(x)\cdot M(x)$$

LA PALABRA ÁLGEBRA

La obra más importante del matemático árabe del siglo IX Al-Khowarizmi llevaba el título de *Al-jabr wa'l muqabalah*.

La primera palabra, *al-jabr*, sirvió, en adelante, para designar la ciencia que en él se trataba.

Por ejemplo, las fracciones $\frac{x-2}{x^2+x-6}$ y $\frac{x}{x^2+3x}$ son equivalentes porque al simplificarse ambas dan lugar a $\frac{1}{x+3}$.

Sus productos cruzados coinciden:

$$(x-2)(x^2+3x)=(x^2+x-6)x=x^3+x^2-6x$$

Reducción a común denominador

Al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción algebraica por un mismo polinomio, se obtiene una fracción equivalente.

Por ejemplo:

$$\frac{2x+1}{3x^2-x} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(3x^2-x)(x-1)} = \frac{2x^2-x-1}{3x^3-4x^2+x}$$

son equivalentes.

Si tenemos varias fracciones algebraicas, podemos obtener otras que, siendo respectivamente equivalentes a las primeras, tengan entre sí el mismo denominador. Se dice, entonces, que se han reducido a **denominador común**.

RECUERDA

Para obtener el mínimo común múltiplo (mín.c.m.) de dos polinomios, se descomponen factorialmente, y se toman todos los factores, coincidentes o no, con los mayores exponentes que presentan.

Por ejemplo, si queremos reducir a denominador común las fracciones $\frac{1}{x}$ y $\frac{x+1}{x-2}$, calcularemos el mín.c.m. $[x, x-2] = x(x-2)$ y obtendremos $\frac{(x-2)}{x(x-2)}$ y $\frac{(x+1)x}{(x-2)x}$, que son equivalentes a las iniciales y tienen, ambas, el mismo denominador.

Suma y resta

Para **sumar** fracciones algebraicas, se reducen a común denominador (si no lo están ya) y se suman sus numeradores.

La **resta** es un caso particular de la suma.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Efectuar:*

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x(x+1)} - \frac{2x-1}{x+1}$$

- Hallamos el mín.c.m. de los denominadores:

mín.c.m. $[x, x(x+1), (x+1)] = x(x+1)$

- Reducimos las fracciones a común denominador y operamos:

$$\frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} - \frac{(2x-1)x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{(x+7)(x+1)+(x-2)-(2x-1)x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+x+7x+7+x-2-2x^2+x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{-x^2+10x+5}{x^2+x}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

2. Efectúa:

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$$

Multiplicación y división

El **producto** de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.

Por ejemplo:

$$\frac{3x+1}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{(3x+1)x}{(x-1)(x+1)}=\frac{3x^2+x}{x^2-1}$$

Fracción inversa de otra:

La fracción inversa de $\dfrac{x^2-5x}{3x-1}$ es $\dfrac{3x-1}{x^2-5x}$, pues su producto es una fracción equivalente al número 1.

El **cociente** de dos fracciones algebraicas es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

Por ejemplo:

$$\frac{2x}{x+1}:\frac{x-1}{x^2}=\frac{2x}{x+1}\cdot\frac{x^2}{x-1}=\frac{2x^3}{x^2-1}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Calcular:*

a) $\dfrac{x^2-3}{x+2}\cdot\dfrac{x-1}{x-3}$

b) $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}:\dfrac{3x-2}{x^2}$

a) $$\frac{x^2-3}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-3}=\frac{(x^2-3)(x-1)}{(x+2)(x-3)}=\frac{x^3-x^2-3x+3}{x^2-3x+2x-6}=$$
$$=\frac{x^3-x^2-3x+3}{x^2-x-6}$$

b) $$\frac{x^2-2x+2}{x-1}:\frac{3x-2}{x^2}=\frac{x^2-2x+2}{x-1}\cdot\frac{x^2}{3x-2}=\frac{(x^2-2x+2)x^2}{(x-1)(3x-2)}=$$
$$=\frac{x^4-2x^3+2x^2}{3x^2-2x-3x+2}=\frac{x^4-2x^3+2x^2}{3x^2-5x+2}$$

2. *Efectuar:*

$\dfrac{x^2}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}:\dfrac{x-1}{3}\right)$

Hacemos la división del paréntesis y después multiplicamos:

$$\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{x+1}:\frac{x-1}{3}\right)=\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{3}{x-1}\right)=\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{3}{(x+1)(x-1)}\right)=$$
$$=\frac{3x^2}{2(x+1)(x-1)}=\frac{3x^2}{2(x^2-1)}=\frac{3x^2}{2x^2-2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Efectúa estas operaciones:

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

4. Calcula:

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

3.3 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Ecuaciones de 2.° grado, $ax^2 + bx + c = 0$

Sus soluciones se obtienen aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \begin{cases} \text{Si } b^2 - 4ac > 0, & \text{hay dos soluciones.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac = 0, & \text{hay una solución.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac < 0, & \text{no tiene solución.} \end{cases}$$

Cuando $b = 0$ o $c = 0$, la ecuación se llama **incompleta** y se puede resolver de forma sencilla sin necesidad de aplicar la fórmula anterior.

- $ax^2 + c = 0 \rightarrow$ se despeja x^2
- $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0$. Sus soluciones son $x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$.

Ecuaciones bicuadradas, $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar.

Para resolverlas efectuamos el cambio $x^2 = y$, y, por tanto, $x^4 = y^2$, con lo que queda una ecuación de segundo grado en la incógnita y:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \rightarrow ay^2 + by + c = 0$$

Por cada valor positivo de y habrá dos valores de x: $x = \pm\sqrt{y}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Resolver las siguientes ecuaciones:*

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 = 0$

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 10y + 9 = 0$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

Soluciones: $-1, 1, -3, 3$

b) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 2y - 3 = 0$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \rightarrow \text{No da solución para } x. \\ 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Soluciones: $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$

c) $x^4 - 5x^2 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 5y = 0$

$$y(y-5) = 0 \begin{cases} y = 0 \rightarrow x = 0 \\ y = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \end{cases} \Bigg\} \quad \textit{Soluciones: } 0, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

2. Resuelve:

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

Ecuaciones con radicales

Ocasionalmente nos encontramos con ecuaciones en las que x se encuentra bajo una raíz cuadrada. Para resolver este tipo de ecuaciones:

- aísla la raíz cuadrada en un miembro;
- eleva ambos miembros al cuadrado.

En este proceso (al elevar al cuadrado) pueden aparecer soluciones falsas que, naturalmente, hay que rechazar. Por ello, en este tipo de ecuaciones **es fundamental comprobar todas las soluciones**.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Resolver las siguientes ecuaciones:*

a) $\sqrt{2x-3}+1=x$

b) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}=4$

a) $\sqrt{2x-3}+1=x$

$\sqrt{2x-3}=x-1$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$2x-3=x^2-2x+1 \rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow$ *Solución*: $x=2$

Comprobación: $\sqrt{2\cdot 2-3}+1=\sqrt{1}+1=2$ La solución es válida.

b) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}=4$ Despejamos una de las dos raíces:

$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{x+7}$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$2x-3=16+(x+7)-8\sqrt{x+7}$ Aislamos en un miembro el término en el que está la raíz:

$x-26=-8\sqrt{x+7}$ Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$x^2-52x+676=64(x+7) \rightarrow x^2-116x+228=0 \rightarrow x_1=2,\ x_2=114$

Comprobación:

$$\begin{cases} x_1=2 \rightarrow \sqrt{2\cdot 2-3}+\sqrt{2+7}=\sqrt{1}+\sqrt{9}=1+3=4 \rightarrow x_1 \text{ es válida.} \\ x_2=114 \rightarrow \sqrt{2\cdot 114-3}+\sqrt{114+7}=15+11\neq 4 \rightarrow x_2 \text{ no es válida.} \end{cases}$$

La solución de la ecuación es $x=2$ (única).

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3}+1=x$

b) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$

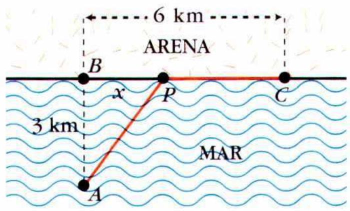
c) $2+\sqrt{x}=x$

d) $2-\sqrt{x}=x$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$

4. Para ir de A hasta C hemos navegado a 4 km/h en línea recta hasta P, y hemos caminado a 5 km/h de P a C. Hemos tardado, en total, 99 minutos (99/60 horas).

¿Cuál es la distancia, x, de B a P?



Ecuaciones con la x en el denominador

Los denominadores algebraicos, al igual que los numéricos, se suprimen multiplicando por el producto de todos ellos o, mejor, por su mínimo común múltiplo. De este modo se llega a una ecuación que, probablemente, se sabe resolver.

En el proceso de multiplicar por expresiones polinómicas, a veces aparecen soluciones falsas. Por tanto, siempre que lo hagamos, **deberemos comprobar todas las soluciones** obtenidas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Resolver estas ecuaciones:*

a) $\dfrac{6}{x} + \dfrac{x+1}{x-2} = 6$

b) $\dfrac{2x-3}{x^2-5x} + \dfrac{x+4}{x} = \dfrac{3}{4}$

a) Para eliminar los denominadores de la ecuación multiplicamos ambos miembros por: $x\,(x-2)$.

$$6(x-2) + (x+1)x = 6x\,(x-2) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 5x^2 - 19x + 12 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \frac{19 \pm \sqrt{361-240}}{10} = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = 3,\; x_2 = \dfrac{4}{5}$

b) Para suprimir los denominadores de la ecuación multiplicamos ambos miembros por: $4(x^2-5x) = 4x(x-5)$.

$$4(2x-3) + 4(x+4)\,(x-5) = 3(x^2-5x) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 + 19x - 92 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \frac{-19 \pm \sqrt{361+368}}{2} = \frac{-19 \pm 27}{2} = \begin{cases} -23 \\ 4 \end{cases}$$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = -23,\; x_2 = 4$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$

b) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

6. Resuelve:

a) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1} = 3$

b) $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{x+3}{x-1} - \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{26}{35}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita está en el exponente.

Por ejemplo:

a) $3^{1-x^2} = 1/27$ b) $5^{x^2-5x+6} = 1$

c) $3^{1-x^2} = 2$ d) $2^x + 2^{x+1} = 12$

Para resolver ecuaciones del tipo a) y b) hay que expresar el segundo miembro como una potencia de la misma base que el primero ($1/27 = 3^{-3}$, $1 = 5^0$). En el caso c) esto no es posible, ya que 2 no es potencia entera ni fraccionaria de 3. Este tipo de ecuaciones se resuelve tomando logaritmos en los dos miembros. Para las ecuaciones del tipo d) necesitarás realizar un cambio de variable.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Resolver las siguientes ecuaciones:*

a) $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

b) $5^{x^2-5x+6} = 1$

c) $3^{1-x^2} = 2$

d) $2^x + 2^{x+1} = 12$

a) Expresamos $\dfrac{1}{27}$ como potencia de base 3: $\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = 3^{-3}$

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{27} \rightarrow 3^{1-x^2} = 3^{-3} \rightarrow 1 - x^2 = -3 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

Soluciones: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

b) Expresamos el segundo miembro como potencia de base 5: $1 = 5^0$

$$5^{x^2-5x+6} = 5^0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

c) Puesto que el segundo miembro no se puede poner como potencia entera de base 3, hemos de tomar logaritmos y recurrir a la calculadora:

$$(1 - x^2)\, log\, 3 = log\, 2 \rightarrow 1 - x^2 = (log\, 2/log\, 3) \approx 0{,}6309298 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 1 - (log\, 2/log\, 3) \approx 1 - 0{,}6309298 \approx 0{,}3690702 \rightarrow x \approx \pm 0{,}6075$$

Soluciones: $x_1 \approx -0{,}6075$, $x_2 \approx 0{,}6075$

d) $2^x + 2^{x+1} = 12$. Hacemos el siguiente cambio de variable:

$2^x = y$. Por tanto, $2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = 2y$.

$$y + 2y = 12 \rightarrow 3y = 12 \rightarrow y = 4 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2$$

Solución: $x = 2$

Ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo.

Por ejemplo:

a) $\log x + \log 50 = 3$, b) $5 \log_2(x + 3) = \log_2 32$, c) $2 \log x = \log(10 - 3x)$

Se resuelven teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos. Es conveniente comprobar las soluciones sobre la ecuación inicial, teniendo en cuenta que solo existe el logaritmo de números positivos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Resolver:*

a) $\log x + \log 50 = 3$

b) $5 \log_2 (x + 3) = \log_2 32$

c) $2 \log x = \log (10 - 3x)$

a) Tendremos en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{l} \log \text{ significa } \log_{10} \\ \log A + \log B = \log (A \cdot B) \\ 3 = \log 1\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \log(50x) = \log 1\,000 \rightarrow 50x = 1\,000 \rightarrow \\ \rightarrow x = \dfrac{1\,000}{50} = 20 \rightarrow \textit{Solución: } x = 20 \end{array}$$

b) Tendremos en cuenta que: $a \log_2 b = \log_2 b^a$

$$\log_2 (x + 3)^5 = \log_2 2^5 \rightarrow x + 3 = 2 \rightarrow x = -1 \rightarrow \textit{Solución: } x = -1$$

c) Utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\log x^2 = \log(10 - 3x) \rightarrow x^2 = 10 - 3x \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

Posibles *soluciones*: $x_1 = 2$, $x_2 = -5$

La solución $x_2 = -5$ no es válida porque en la ecuación original aparece $\log x$ y no se puede hallar el logaritmo de un número negativo.

Por tanto, la solución única es $x_1 = 2$.

(Si la ecuación inicial fuera $\log x^2 = \log(10 - 3x)$, serían válidas las dos soluciones).

EJERCICIOS PROPUESTOS

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{3x} = 0{,}5^{3x + 2}$

b) $3^{4 - x^2} = \dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{4^{x - 1}}{2^{x + 2}} = 186$

d) $7^{x + 2} = 5\,764\,801$

8. Resuelve:

a) $3^x + 3^{x + 2} = 30$

b) $5^{x + 1} + 5^x + 5^{x - 1} = \dfrac{31}{5}$

c) $2 \log x - \log(x + 6) = 3 \log 2$

d) $4 \log_2 (x^2 + 1) = \log_2 625$

3.4 SISTEMAS DE ECUACIONES

Recuerda que:

- Una **solución** de una ecuación con varias incógnitas es un conjunto de valores (uno para cada incógnita) que hacen cierta la igualdad. Por ejemplo, una solución de la ecuación $x^2 + y - z = 12$ es $x = 2$, $y = 3$, $z = -5$ porque $2^2 + 3 - (-5)$ es igual a 12.
- Las ecuaciones con más de una incógnita suelen tener infinitas soluciones.
- Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones de las que pretendemos encontrar su solución común (o sus soluciones comunes).

  Por ejemplo, la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

  $$\left.\begin{array}{l} x + y = 7 \\ 5x - 2y = -7 \end{array}\right\} \text{ es } x = 1,\ y = 6 \text{ porque es solución de ambas ecuaciones.}$$

- Para **resolver un sistema de ecuaciones** existen varios procedimientos que repasaremos en los ejemplos que aparecen a continuación. Dominando estos procedimientos y las técnicas para resolver ecuaciones (que hemos repasado en páginas anteriores) se puede afrontar con solvencia una amplísima gama de sistemas de ecuaciones.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:*

a) $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x+y} + y = x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\log x - \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$

a) Resolvámoslo por el **método de sustitución**.

Despejamos y en la 1ª ecuación: $y = 2x - 9$.

Sustituimos en la 2ª:

$$\sqrt{x + 2x - 9} + 2x - 9 = x \rightarrow \sqrt{3x - 9} = 9 - x$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$3x - 9 = (9 - x)^2 \rightarrow 3x - 9 = 81 + x^2 - 18x \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 21x + 90 = 0 \rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = 15$$

Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 6,\ y_1 = 3 \\ \cancel{x_2 = 15,\ y_2 = 21} \end{cases}$

Comprobadas sobre las ecuaciones del sistema inicial, vemos que la primera solución es válida, pero la segunda no.

b) $\begin{cases} 2\log x - \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases} \xrightarrow{\log(A \cdot B) = \log A + \log B} \left.\begin{array}{l} 2\log x - \log y = 5 \\ \log x + \log y = 4 \end{array}\right\}$

Aplicamos el **método de reducción**.

Sumamos, miembro a miembro, las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3\log x = 9 \rightarrow \log x = 3 \\ \log y = 4 - \log x = 4 - 3 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \log x = 3 \rightarrow x = 10^3 = 1\,000 \\ \log y = 1 \rightarrow y = 10^1 = 10 \end{array}$$

Solución: $x = 1\,000$, $y = 10$

2. *Resolver este sistema:*

$$\begin{cases} e = \dfrac{1}{4,8}\,t^2 \\ e = 20(t - 18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = \dfrac{1}{4,8}\,t^2 \\ e = 20(t - 18) \end{cases}$$

Este sistema describe los movimientos de dos móviles, uno con aceleración uniforme y otro con velocidad constante. La solución buscada es el lugar y el momento de encuentro de ambos móviles (e en metros y t en segundos).

Lo resolvemos por el **método de igualación**:

$$\frac{1}{4,8}t^2 = 20\,(t - 18) \to t^2 = 4,8 \cdot 20\,(t - 18) \to t^2 - 96t + 1\,728 = 0 \begin{cases} t_1 = 24 \\ t_2 = 72 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = 24 \;\to\; e_1 = 120 \\ t_2 = 72 \;\to\; e_2 = 1\,080 \end{array}\right\}$$

Los dos móviles coinciden en dos momentos: a los 24 s están ambos a 120 m de la salida, y a los 72 s, a 1 080 m de la salida.

3. *Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y} = 0 \end{cases}$$

Sustituimos el valor de y de la 1ª ecuación en la 2ª: $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x + 2} = 0$

Multiplicamos por $x\,(x + 2)$:

$$(x + 2) - x \cdot x = 0 \;\to\; x^2 - x - 2 = 0 \;\to\; x_1 = -1,\; x_2 = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -1 \;\to\; y_1 = 1 \\ x_2 = 2 \;\to\; y_2 = 4 \end{array}\right\}$$

Comprobando en el sistema inicial, vemos que ambas soluciones son válidas.

4. *Resolver este sistema:*

$$\begin{cases} \log\,(x + y) - \log\,(x - y) = \log 5 \\ 2^x = 4 \cdot 2^y \end{cases}$$

Transformaremos la ecuación intentando que desaparezcan los logaritmos y las potencias.

1ª ecuación: $\log \dfrac{x + y}{x - y} = \log 5 \;\to\; \dfrac{x + y}{x - y} = 5 \;\to\; x + y = 5x - 5y \;\to$

$$\to\; 4x = 6y \;\to\; 2x = 3y$$

2ª ecuación: $2^x = 2^2 \cdot 2^y \;\to\; 2^x = 2^{2 + y} \;\to\; x = 2 + y$

El sistema queda así: $\left\{\begin{array}{l} 2x = 3y \\ x = 2 + y \end{array}\right\}$

Sustituimos la 2ª en la 1ª:

$2(2 + y) = 3y \;\to\; y = 4 \;\to\; x = 6$

Solución: $x = 6,\; y = 4$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \end{cases}$

2. Resuelve:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log\,(x^2 + y) - \log\,(x - 2y) = 1 \\ 5^{x + 1} = 25^{y + 1} \end{cases}$

3.5 MÉTODO DE GAUSS PARA SISTEMAS LINEALES

Para los sistemas lineales de más de dos ecuaciones y dos incógnitas existe una interesante generalización del método de reducción. Veámoslo para sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

SISTEMAS LINEALES

Las ecuaciones polinómicas de primer grado se llaman *lineales*. En ellas, las incógnitas no están elevadas a ningún exponente, ni multiplicadas entre sí, ni bajo radicales, ni en el denominador.

Un sistema formado por ecuaciones lineales (todas ellas) se denomina *sistema lineal*.

Sistemas escalonados

Observa los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 5y - 10z = -15 \\ \quad\;\; 2y + 5z = 4 \\ \qquad\quad\;\; 3z = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \qquad\; y - 2z = -4 \\ \quad\;\; 4y \qquad = 24 \\ x - 2y + z = -5 \end{cases}$

a) La resolución del primero de ellos se realiza de forma muy sencilla:

3ª ec.: $z = -\dfrac{6}{3} = -2$

2ª ec.: $2y + 5 \cdot (-2) = 4 \;\rightarrow\; 2y = 14 \;\rightarrow\; y = \dfrac{14}{2} = 7$

1ª ec.: $3x - 5 \cdot 7 - 10(-2) = -15 \;\rightarrow\; 3x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

El proceso para llegar a la solución $x = 0$, $y = 7$, $z = -2$ ha sido muy sencillo por la *forma escalonada* del sistema: cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

b) Aunque su fisonomía sea menos clara, este otro sistema también es *escalonado*:

2ª ec.: $y = \dfrac{24}{4} = 6$

1ª ec.: $6 - 2z = -4 \;\rightarrow\; -2z = -4 - 6 = -10 \;\rightarrow\; z = 5$

3ª ec.: $x - 2 \cdot 6 + 5 = -5 \;\rightarrow\; x = -5 + 12 - 5 = 2$

Solución: $x = 2$, $y = 6$, $z = 5$

Un **sistema** de tres ecuaciones con tres incógnitas se llama **escalonado** si en una de las ecuaciones solo aparece una incógnita y en otra de las ecuaciones falta alguna de las otras dos incógnitas.

Es claro que los sistemas escalonados son muy fáciles de resolver.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Reconoce como escalonados y resuelve:

a) $\begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$

Método de Gauss

Acabamos de ver que los sistemas escalonados son muy sencillos de resolver. El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineales cualquiera en un sistema escalonado. Veámoslo con unos ejemplos:

I. $\begin{cases} x - 3y + 4z = 21 \\ 3x + y - z = -18 \\ 2x - y + 3z = 12 \end{cases} \xrightarrow{*} \begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) - 3 \cdot (1^a) \\ (3^a) - 2 \cdot (1^a) \end{array} \begin{cases} x - 3y + 4z = 21 \\ 10y - 13z = -81 \\ 5y - 5z = -30 \end{cases} \rightarrow$

$\xrightarrow{**} \begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) - 2 \cdot (3^a) \\ (3^a) : 5 \end{array} \begin{cases} x - 3y + 4z = 21 \\ -3z = -21 \\ y - z = -6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2^a) \rightarrow z = 7 \\ (3^a) \rightarrow y = 1 \\ (1^a) \rightarrow x = -4 \end{array}$

Solución: $x = -4, \; y = 1, \; z = 7$

ACLARACIONES I

* Para suprimir la x de las ecuaciones segunda y tercera.

** Para suprimir la y de la segunda ecuación.

II. $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - z = 9 \\ 3x + y - 2z = 13 \end{cases} \xrightarrow{*} \begin{array}{l} (1^a) + 2 \cdot (3^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \begin{cases} 7x - 3z = 29 \\ 2x - z = 9 \\ 3x + y - 2z = 13 \end{cases} \rightarrow$

$\xrightarrow{**} \begin{array}{l} (1^a) - 3 \cdot (2^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \begin{cases} x = 2 \\ 2x - z = 9 \\ 3x + y - 2z = 13 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1^a) \rightarrow x = 2 \\ (2^a) \rightarrow z = -5 \\ (3^a) \rightarrow y = -3 \end{array}$

Solución: $x = 2, \; y = -3, \; z = -5$

ACLARACIONES II

* Puesto que la segunda ecuación no tiene y, la suprimimos también de la primera.

** Es más fácil eliminar la z que la x debido a que en la segunda ecuación el coeficiente de la z es -1.

III. $\begin{cases} 5x + 2y - 3z = -1 \\ 2x + 3y - 4z = -6 \\ 6x - 4y + z = 8 \end{cases} \xrightarrow{*} \begin{array}{l} (1^a) + 3 \cdot (3^a) \\ (2^a) + 4 \cdot (3^a) \\ (3^a) \end{array} \begin{cases} 23x - 10y = 23 \\ 26x - 13y = 26 \\ 6x - 4y + z = 8 \end{cases} \rightarrow$

$\xrightarrow{**} \begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) : 13 \\ (3^a) \end{array} \begin{cases} 23x - 10y = 23 \\ 2x - y = 2 \\ 6x - 4y + z = 8 \end{cases} \rightarrow$

$\xrightarrow{***} \begin{array}{l} (1^a) - 10 \cdot (2^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \begin{cases} 3x = 3 \\ 2x - y = 2 \\ 6x - 4y + z = 8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1^a) \rightarrow x = 1 \\ (2^a) \rightarrow y = 0 \\ (3^a) \rightarrow z = 2 \end{array}$

Solución: $x = 1, \; y = 0, \; z = 2$

ACLARACIONES III

* Para suprimir la z de las ecuaciones primera y segunda.

** Para hacer más pequeños los coeficientes de la segunda ecuación.

*** Para suprimir la y de la primera ecuación.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$

4. Resuelve:

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$

Sistemas incompatibles (sin solución)

Si un sistema de ecuaciones es incompatible (no tiene solución), ¿cómo evoluciona al intentar resolverlo por el método de Gauss? ¿Cómo reconoceremos, finalmente, que es incompatible? Veámoslo:

IV. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + \ \ y - \ \ z = 7 \\ \ \ x + 4y - 4z = 0 \end{cases} \overset{*}{\longrightarrow}$ $\begin{matrix} (1^{a}) - 2\cdot(2^{a}) \\ (2^{a}) \\ (3^{a}) - 4\cdot(2^{a}) \end{matrix}$ $\begin{cases} -5x \qquad\qquad = -10 \\ \ \ 4x + y - z = 7 \\ -15x \qquad\qquad = -28 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ $\begin{matrix} (1^{a}) : (-5) \\ (2^{a}) \\ (3^{a}) - 3\cdot(1^{a}) \end{matrix}$ $\begin{cases} x \qquad\qquad = 2 \\ 4x + y - z = 7 \\ 0x \qquad\qquad = 2 \end{cases}$ La tercera ecuación es un absurdo, imposible para cualquier valor de x.

Llegamos a un absurdo. Por tanto, el sistema no tiene solución. Es incompatible.

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = k \ (k \neq 0)$, entonces el sistema es **incompatible**.

ACLARACIONES IV

* Para suprimir la y de las ecuaciones primera y tercera.

Nos encontramos con un regalo inesperado: también desaparece la z.

NOMENCLATURA

Sería más correcto decir que *las ecuaciones que forman el sistema son incompatibles.*

Sin embargo, se abrevia diciendo que *el sistema es incompatible.*

Sistemas indeterminados (con infinitas soluciones)

Hay sistemas en los que sobra una ecuación, pues no dice nada que no se pueda deducir de las otras. Vamos a aprender a reconocerlos:

V. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + \ \ y - \ \ z = 7 \\ \ \ x + 4y - 4z = -2 \end{cases} \longrightarrow$ $\begin{matrix} (1^{a}) - 2\cdot(2^{a}) \\ (2^{a}) \\ (3^{a}) - 4\cdot(2^{a}) \end{matrix}$ $\begin{cases} -5x \qquad\qquad = -10 \\ \ \ 4x + y - z = 7 \\ -15x \qquad\qquad = -30 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ $\begin{matrix} (1^{a}) : (-5) \\ (2^{a}) \\ (3^{a}) - 3\cdot(1^{a}) \end{matrix}$ $\begin{cases} x \qquad\qquad = 2 \\ 4x + y - z = 7 \\ 0x \qquad\qquad = 0 \end{cases}$ La tercera ecuación no dice nada. La suprimimos y nos quedamos con las otras dos:

$$\begin{cases} x \qquad\qquad = 2 \\ 4x + y - z = 7 \end{cases} \rightarrow \ 8 + y - z = 7 \ \rightarrow \ y = z - 1 \ \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

Para cada valor de z hay una solución.

Por ejemplo, para $z = 5 \rightarrow \boxed{x = 2, \ y = 4, \ z = 5}$

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = 0$, se suprime. Si quedan menos ecuaciones que incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones. Se llama **indeterminado**.

EJERCICIOS PROPUESTOS

5. Intenta resolver por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + \ \ y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - \ \ y \qquad = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \ \ y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - \ \ y \qquad = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \qquad + \ \ z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - \ \ z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \qquad + \ \ z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - \ \ z = 1 \end{cases}$

3.6 INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Observa tres inecuaciones y un sistema de inecuaciones:

a) $2x + 1 < 7$ b) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ c) $\sqrt{x+3} \geq 5$ d) $\begin{cases} 3x - 9 < 0 \\ 2x + 4 \geq 0 \end{cases}$

Como ves, se trata de desigualdades en las que se usan los signos $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$.

Solución de una inecuación es un valor de x con el cual se cumple la desigualdad.

Por ejemplo: 22, 50, 1 000 son algunas soluciones de la inecuación c).

Solución de un sistema de inecuaciones es una solución común a todas las inecuaciones que lo forman. Por ejemplo, $x = 0$ es solución del sistema d), porque es solución de las dos inecuaciones.

Resolver una inecuación o un sistema de inecuaciones consiste en encontrar *todas* sus soluciones. Habitualmente tienen infinitas, que se agrupan en intervalos de $\mathbb{R}$.

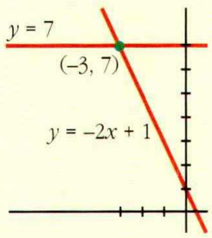
Inecuaciones lineales con una incógnita

Para resolver una **inecuación lineal** con una incógnita, se procede de forma similar a como se hace con las ecuaciones, pero teniendo en cuenta las desigualdades. Sus soluciones son todos los puntos de un intervalo infinito.

Las soluciones de un **sistema de inecuaciones lineales** con una incógnita pueden formar un intervalo, finito o infinito, o pueden no existir.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Resolver $-2x + 1 < 7$.*



$-2x + 1 < 7$

Restamos 1 en cada miembro: $-2x < 6$

Dividimos entre -2 (cambia la desigualdad): $x > -3$

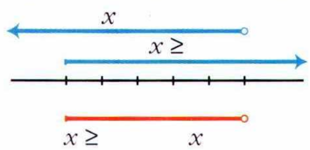
Soluciones: $\{x \mid x > -3\} = (-3, +\infty)$

Gráficamente se interpreta así: para valores de x mayores que -3, la recta $y = -2x + 1$ va por debajo de $y = 7$; es decir, $-2x + 1 < 7$.

2. *Resolver:*

$\begin{cases} 3x - 9 < 0 \\ 2x + 4 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 9 < 0 \\ 2x + 4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x < 9 \\ 2x \geq -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq -2 \end{cases}$



Las soluciones del sistema son las comunes a las dos inecuaciones:

$$\{x \mid x < 3 \text{ y } x \geq -2\} = \{x \mid -2 \leq x < 3\} = [-2, 3)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x - 2 \leq 10$ c) $2x + 5 \geq 6$

b) $x - 2 > 1$ d) $3x + 1 \leq 15$

2. Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 2 \leq 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$

En tu CD se te explica cómo trabajar: con **DERIVE** (1) y con **CALCULADORA GRÁFICA** (2) algunos aspectos de esta unidad.

Inecuaciones cuadráticas con una incógnita

Las soluciones de las inecuaciones $ax^2 + bx + c < 0$ (o bien ≤ 0) y $ax^2 + bx + c > 0$ (o bien ≥ 0) dependen de la posición de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ respecto al eje X y de que el signo sea $<$, $\le$, $>$ o $\ge$.

EJERCICIOS RESUELTOS

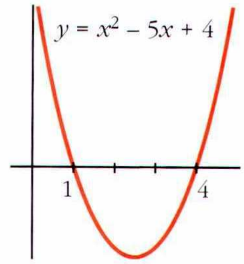
1. *Resolver las inecuaciones:*

a) $x^2 - 5x + 4 \le 0$

b) $x^2 - 5x + 4 < 0$

c) $x^2 - 5x + 4 \ge 0$

d) $x^2 - 5x + 4 > 0$



La parábola $y = x^2 - 5x + 4$ corta al eje X en 1 y en 4.

En el intervalo $[1, 4]$ toma valores negativos o nulos. Por tanto:

- Las *soluciones* de la inecuación a) son los puntos del intervalo $[1, 4]$.
- Las *soluciones* de b) son los puntos del intervalo $(1, 4)$.

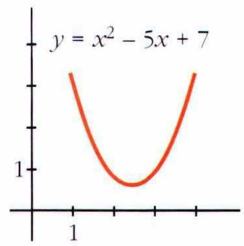
Las soluciones de c) y d) son los valores de x para los cuales la parábola está encima del eje X. Por tanto:

- *Soluciones* de c): $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.
- *Soluciones* de d): $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

2. *Resolver las inecuaciones:*

a) $x^2 - 5x + 7 \le 0$

b) $x^2 - 5x + 7 \ge 0$



La parábola queda toda ella por encima del eje X.

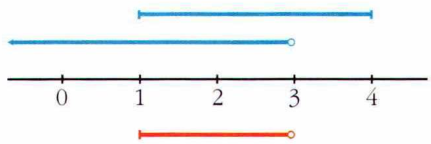
Por tanto, la inecuación a) no tiene solución, y cualquier número real es solución de la inecuación b).

3. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \le 0 \\ 3x - 9 < 0 \end{cases}$$

Soluciones de la primera inecuación: $[1, 4]$

Soluciones de la segunda inecuación: $(-\infty, 3)$



Soluciones comunes: $[1, 3)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 3x - 4 < 0$

b) $x^2 - 3x - 4 \ge 0$

c) $x^2 + 7 < 0$

d) $x^2 - 4 \le 0$

4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \ge 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4 \le 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

LENGUAJE MATEMÁTICO

LAS IGUALDADES EN ÁLGEBRA

- **Identidades**. Cuando ponemos $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ estamos diciendo que "la expresión algebraica $(x + 3)^2$ coincide con el polinomio $x^2 + 6x + 9$". Es decir, se trata de una **identidad**: "operando" en el primer miembro se obtiene el segundo miembro.

  Una buena parte de la actividad en álgebra consiste en conseguir identidades. Las operaciones con polinomios y con fracciones algebraicas, simplificaciones, descomposición factorial, … sirven para pasar de una expresión algebraica a otra, idéntica pero más conveniente para lo que pretendemos.

- **Ecuaciones**. La igualdad $x^3 + x^2 = 12x$ no es cierta si la leemos como identidad entre los dos miembros. Se trata de una **ecuación** en la que lo que se dice es: "deseamos encontrar un valor de x para el cual el polinomio $x^3 + x^2$ tome el mismo valor que el polinomio $12x$". O dicho de otra forma: "¿Para qué valor de x se cumple que $x^3 + x^2$ es igual a $12x$?". La solución "$x = 3$, $x = -4$, $x = 0$" es la respuesta a dicha pregunta.

- **Equivalencias**. Al resolver una ecuación damos "pasos". Por ejemplo $x^3 + x^2 = 12x$ $\to$ $x^3 + x^2 - 12x = 0$. Cada paso conlleva una equivalencia: "la ecuación $x^3 + x^2 = 12x$ es **equivalente** a la ecuación $x^3 + x^2 - 12x = 0$". O dicho de otro modo: "la ecuación $x^3 + x^2 = 12x$ tiene las mismas soluciones que $x^3 + x^2 - 12x = 0$".

  Ejemplo. Resolvamos una ecuación analizando qué se hace en cada paso:

  $x(x - 2)^2 = 16x - 5x^2$........... Es una ecuación. Por tanto, hemos de averiguar los valores de x que hagan cierta la igualdad.

  $x(x^2 - 4x + 4) = 16x - 5x^2$... $(x - 2)^2$ es idéntica a $x^2 - 4x + 4$. La sustitución hace que la nueva ecuación sea equivalente a la anterior.

  $x^3 - 4x^2 + 4x = 16x - 5x^2$.... $x(x^2 - 4x + 4)$ es idéntico a $x^3 - 4x^2 + 4x$. Al sustituir lo uno por lo otro se obtiene una ecuación equivalente.

  $x^3 + x^2 - 12x = 0$.................. Al trasponer términos se obtiene una ecuación equivalente.

  $x(x^2 + x - 12) = 0$................ $x^3 + x^2 - 12x$ es idéntica a $x(x^2 + x - 12)$.

  $x = 0$ o $x^2 + x - 12 = 0$....... Las soluciones de la ecuación anterior son $x = 0$ junto con las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 12 = 0$.

  $x = 0$ o $x = 3$ o $x = -4$..... Estas son las soluciones de la última ecuación. Por tanto, son las soluciones de la primera: la que se nos propuso.

EJERCICIOS

1. De las siguientes igualdades, ¿cuáles son identidades?

a) $(x - 3)(x - 2)x = x^3 - 5x^2 + 6x$

b) $(x - 3)(x - 2)x = x^3$ c) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

d) $\dfrac{x^3 - 3x - 5}{x - 2} = x^2 + 2x + 1 - \dfrac{3}{x - 2}$

Comprueba, en ellas, que la igualdad es cierta para cualesquiera valores de las variables (haz la comprobación para varios números).

2. Resuelve, paso a paso, la ecuación

$$(x^2 - 6x + 9)x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$$

y explica en cada paso por qué la ecuación que se obtiene es equivalente a la que había.

Cuando el paso consista en obtener una expresión idéntica a otra, señala cuál es la expresión transformada, cuál es la obtenida y qué operación permite pasar de la una a la otra.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1 Resolución de ecuaciones por factorización

Resuelve la ecuación:

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$$

Buscamos una raíz entera entre los divisores de -1.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, -1 es una raíz. Así:

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1) = 0$$

Al resolver $6x^2 + x - 1 = 0$, obtenemos las soluciones $\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{2}$.

Luego las soluciones de nuestra ecuación son:

$$x = -1,\ x = \frac{1}{3} \text{ y } x = -\frac{1}{2}$$

2 Fracciones algebraicas

Simplifica las fracciones:

a) $A = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 2x^2}$

b) $B = \dfrac{x + 2}{x^3 - 3x + 2}$

a) Descomponemos en factores el numerador y el denominador de la fracción:

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2 \\ Q(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2) \end{array}\right\} A = \frac{x(x - 2)^2}{x^2(x - 2)}$$

Dividimos numerador y denominador por el máx.c.d. $[P(x), Q(x)]$:

$$\text{máx.c.d. } [P(x), Q(x)] = x(x - 2) \rightarrow \boxed{A = \frac{x - 2}{x}}$$

b) Factorizamos el denominador: $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2)$

$$B = \frac{x + 2}{(x - 1)^2 (x + 2)} \underset{(*)}{=} \frac{1}{(x - 1)^2} \rightarrow \boxed{B = \frac{1}{(x - 1)^2}}$$

(*) Hemos dividido numerador y denominador entre $x + 2$, que es el máximo común divisor.

3 Ecuaciones con valor absoluto

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $|x^2 - 3x| = 4$

b) $|2x - 3| = |x + 4|$

a) Si $|x^2 - 3x| = 4$ puede ser: I) $x^2 - 3x = 4$ II) $x^2 - 3x = -4$

I) $x^2 - 3x = 4 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow$ *Soluciones*: $\boxed{x = 4;\ x = -1}$

II) $x^2 - 3x = -4 \rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

b) Los valores de $2x - 3$ y $x + 4$ pueden ser iguales u opuestos.

I) $2x - 3 = x + 4 \rightarrow \boxed{x = 7}$

II) $2x - 3 = -(x + 4) \rightarrow 2x - 3 = -x - 4 \rightarrow 3x = -1 \rightarrow \boxed{x = -1/3}$

4 Ecuaciones logarítmicas

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log(5x-3) = \dfrac{4}{5}$

b) $\dfrac{1}{2}\log(2x+3) = \log x$

c) $\ln(x-1) + \ln(x+6) =$
$= \ln(3x+2)$

a) Aplicamos la definición de logaritmo:

$$5x - 3 = 10^{4/5}$$

Con la calculadora,

$$10^{4/5} \approx 6{,}3 \rightarrow 5x - 3 \approx 6{,}3 \rightarrow \boxed{x \approx 1{,}86}$$

b) $\dfrac{1}{2}\, log\,(2x+3) = log\, x \rightarrow log\,(2x+3) = 2\, log\, x \rightarrow$

$\rightarrow log\,(2x+3) = log\, x^2 \rightarrow 2x + 3 = x^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\begin{cases} \boxed{x = 3} & \text{Es la solución de la ecuación.} \\ x = -1 & \text{No vale; no existe } log\,(-1). \end{cases}$

$\rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

c) Tenemos en cuenta que $ln\, A + ln\, B = ln\,(A \cdot B)$:

$ln\,[(x-1)(x+6)] = ln\,(3x+2) \rightarrow$

$\rightarrow (x-1)(x+6) = 3x + 2 \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 3x + 2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$ $\begin{cases} \boxed{x = 2} & \textit{Solución.} \\ x = -4 & \text{No vale.} \end{cases}$

5 Ecuaciones exponenciales

Resuelve las tres ecuaciones siguientes:

a) $2^{3x-1} = 4^{x+3}$

b) $e^{x+2} = 40$

c) $3^x + \dfrac{1}{3^{x+1}} = \dfrac{28}{9}$

a) En ambos miembros las bases son potencias de base 2, ya que $4 = 2^2$.

$$2^{3x-1} = \left(2^2\right)^{x+3} \rightarrow 2^{3x-1} = 2^{2x+6} \rightarrow 3x - 1 = 2x + 6 \rightarrow \boxed{x = 7}$$

b) No podemos expresar 40 como una potencia de base e, que es la base del primer miembro.

Tomamos logaritmos neperianos:

$$ln\, e^{x+2} = ln\, 40 \rightarrow (x+2)\, ln\, e = ln\, 40 \rightarrow x + 2 = ln\, 40 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = ln\, 40 - 2. \text{ Con la calculadora: } \boxed{x \approx 1{,}69}$$

c) Hacemos el cambio de variable $3^x = y$, teniendo en cuenta que $3^{x+1} = 3^x \cdot 3$.

$$3^x + \frac{1}{3^x \cdot 3} = \frac{28}{9} \rightarrow y + \frac{1}{3y} = \frac{28}{9} \rightarrow 9y^2 + 3 = 28y \rightarrow$$

$$\rightarrow 9y^2 - 28y + 3 = 0 \begin{cases} y = 3 \rightarrow 3^x = 3 \rightarrow \boxed{x_1 = 1} \\ y = \dfrac{1}{9} \rightarrow 3^x = \dfrac{1}{9} = 3^{-2} \rightarrow \boxed{x_2 = -2} \end{cases}$$

Comprobamos en la ecuación original y vemos que ambas soluciones son válidas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

6 Sistemas de ecuaciones

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 10 \\ 3^x = \dfrac{1}{9} \cdot 3^y \end{array}\right.$$

Despejamos y en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 10 - x \\ 3^x = \dfrac{1}{9} \cdot 3^{10-x} \end{array}\right.$$

Expresamos $\frac{1}{9}$ como potencia de 3, $\frac{1}{9} = 3^{-2}$, y operamos:

$$3^x = 3^{-2} \cdot 3^{10-x} \to 3^x = 3^{8-x} \to x = 8 - x \to 2x = 8 \to \boxed{x = 4}$$

Sustituyendo ahora en la expresión de y:

$$y = 10 - x = 10 - 4 = 6 \to \boxed{y = 6}$$

7 Método de Gauss

Resuelve por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right.$$

Comenzamos eliminando la y de las ecuaciones primera y segunda.

Para ello ponemos la tercera ecuación en primer lugar y se la sumamos a las otras dos:

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 2z = -3 \\ 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) + (1^a) \\ (3^a) + (1^a) \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{l} x - 2y + 2z = -3 \\ 6x + 5z = 1 \\ 3x + 3z = 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) \\ 2 \cdot (3^a) - (2^a) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 6x + 5z = 1 \\ z = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (3^a) \to z = -1 \\ (2^a) \to 6x = 1 + 5 \to x = 1 \\ (1^a) \to 1 - 2y - 2 = -3 \to y = 1 \end{array}$$

Solución: $x = 1,\ y = 1,\ z = -1$

8 Inecuaciones

Resuelve:

a) $x + 1 - 3(x - 1) < 1 - x$

b) $x^2 - x - 6 \geq 0$

a) Despejamos x sabiendo que al multiplicar o dividir una inecuación por un número negativo, **cambia el sentido** de la desigualdad.

$$x + 1 - 3x + 3 < 1 - x \to -x < -3 \to \boxed{x > 3,\quad (3, +\infty)}$$

b) Para saber cuándo es positivo o negativo el valor de un polinomio, lo decomponemos y estudiamos el signo de los distintos factores.

Buscamos las raíces resolviendo $x^2 - x - 6 = 0$: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

Estudiamos el signo de los factores $(x - 3)$ y $(x + 2)$ en los intervalos:

	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$(x - 3)(x + 2)$	$- \cdot - = +$	$- \cdot + = -$	$+ \cdot + = +$

Soluciones:

$\boxed{x \leq -2 \text{ o } x \geq 3}$

$\updownarrow$

$\boxed{(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)}$

9 Tres sistemas muy parecidos para resolver por el método de Gauss

a) $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ 4x - y \phantom{{}+z} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ 4x - y + z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases}$

a) Eliminamos la z de la segunda ecuación:

$$\begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) + (1^a) \\ (3^a) \end{array} \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x \phantom{{}+y-z} = 3 \\ 4x - y \phantom{{}-z} = 2 \end{cases} \begin{array}{l} (2^a) \to x = 1 \\ (3^a) \to 4 - y = 2 \to y = 2 \\ (1^a) \to 2 + 2 - z = -1 \to z = 5 \end{array}$$

Solución:

$x = 1,\ y = 2,\ z = 5$

b) Eliminamos la z de las ecuaciones segunda y tercera:

$$\begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) + (1^a) \\ (3^a) + (1^a) \end{array} \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x \phantom{{}+y-z} = 3 \\ 6x \phantom{{}+y-z} = 1 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) - 2 \cdot (2^a) \end{array} \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x \phantom{{}+y-z} = 3 \\ 0x \phantom{{}+y-z} = -5 \end{cases}$$

La tercera ecuación es un absurdo. Por tanto, el sistema es incompatible. No tiene solución.

c) Eliminamos la z de las ecuaciones segunda y tercera:

$$\begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) + (1^a) \\ (3^a) + (1^a) \end{array} \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x \phantom{{}+y-z} = 3 \\ 6x \phantom{{}+y-z} = 6 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) - 2 \cdot (2^a) \end{array} \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x \phantom{{}+y-z} = 3 \\ 0x \phantom{{}+y-z} = 0 \end{cases}$$

La última ecuación no dice nada y, por tanto, la podemos suprimir.

El sistema queda así:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x \phantom{{}+y-z} = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ 2 + y - z = -1 \to y = z - 3 \end{cases}$$

Para cada valor que le demos a la z habrá una solución. Por ejemplo:

$z = 0 \to x = 1,\ y = -3,\ z = 0$

$z = 5 \to x = 1,\ y = 2,\ z = 5$

$z = -2 \to x = 1,\ y = -5,\ z = -2$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Factorización

1 Descompón en factores estos polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $x^4 - 5x^2 + 4$

c) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

d) $x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$

e) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

f) $x^5 - 16x$

g) $4x^2 - 25$

h) $4x^2 + 4x + 1$

2 Halla, en cada uno de los siguientes casos, el máx.c.d. $[A(x), B(x)]$ y el mín.c.m. $[A(x), B(x)]$:

a) $A(x) = x^2 + x - 12; \quad B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1; \quad B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2; \quad B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones, factorizando previamente:

a) $x^3 - 7x - 6 = 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$

c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

e) $x^5 - 16x = 0$

f) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

g) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

Fracciones algebraicas

4 Simplifica las fracciones:

a) $\dfrac{9 - x^2}{x^2 - 3x}$ b) $\dfrac{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}{x^3 - 4x}$

5 Opera y simplifica el resultado:

a) $\dfrac{3a + 3}{12a - 12} : \dfrac{(a + 1)^2}{a^2 - 1}$

b) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)^3} \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 1}$

c) $\dfrac{x}{x - 2} - \dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$

d) $\left(\dfrac{x + 1}{x} - \dfrac{x}{x + 2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x + 2}\right)$

e) $\left(1 - \dfrac{x + 1}{x + 2} \cdot \dfrac{x + 3}{x + 2}\right) : \dfrac{1}{x + 2}$

6 Demuestra las siguientes identidades:

a) $\left(\dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{2x}{1 - x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{a^2 - 1}{a^2 - 3a + 2} : \dfrac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - a - 2} = 1$

c) $\left(\dfrac{x - 2}{x - 3} - \dfrac{x - 3}{x - 2}\right) : \left(\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{1}{x - 2}\right) = 2x - 5$

Ecuaciones de primer y segundo grado

7 Entre estas ecuaciones de primer grado, hay dos que no tienen solución, dos que tienen infinitas soluciones y dos que tienen solución única. Identifica cada caso y resuelve las que sean posible:

a) $\dfrac{x + 1}{2} = x - \dfrac{2x + 3}{4}$

b) $x + \dfrac{3 - x}{3} - 1 = \dfrac{2}{3}x$

c) $\dfrac{(x + 1)^2}{16} - \dfrac{1 + x}{2} = \dfrac{(x - 1)^2}{16} - \dfrac{2 + x}{4}$

d) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x - 1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x + 2)^2$

e) $(5x - 3)^2 - 5x(4x - 5) = 5x(x - 1)$

f) $\dfrac{2x + 1}{7} - \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{2} = \dfrac{x - 2}{2} - \dfrac{(x - 2)^2}{2}$

8 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \dfrac{x^2 + 2}{2}$

b) $0{,}5(x - 1)^2 - 0{,}25(x + 1)^2 = 4 - x$

c) $(0{,}5x - 1)(0{,}5x + 1) = (x + 1)^2 - 9$

d) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)^2 - \dfrac{x + 1}{8} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{x - 1}{4}$

e) $\dfrac{x(x - 3)}{2} + \dfrac{x(x + 2)}{4} = \dfrac{(3x - 2)^2}{8} + 1$

f) $0{,}\hat{3}x^2 - x - 1{,}\hat{3} = 0$

☛ *Expresa los decimales periódicos en forma de fracción y obtendrás soluciones enteras.*

9 Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general y comprueba las soluciones:

☛ *Recuerda:* $ax^2 + c = 0$ *se resuelve despejando* x. $ax^2 + bx = 0$ *se resuelve sacando factor común e igualando a cero cada factor.*

a) $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$

b) $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{2} - \dfrac{x^2 + 3x}{4} = \dfrac{x^2 - 4x + 15}{6}$

c) $\dfrac{3x + 1}{3} - \dfrac{5x^2 + 3}{2} = \dfrac{x^2 - 1}{2} - \dfrac{x + 2}{3}$

d) $(x - a)^2 + x(x + b) = 8b^2 - x(2a - b) + a^2$

Ecuaciones bicuadradas

10 Resuelve estas ecuaciones bicuadradas y comprueba las soluciones:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

11 Resuelve:

a) $(x^2 - 2)^2 = 1$

b) $\dfrac{3x^4 - 1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(x^4 - 2 - \dfrac{1}{2}x^2\right) = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

Ecuaciones con radicales

12 Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

a) $\sqrt{5x + 6} = 3 + 2x$

b) $x + \sqrt{7 - 3x} = 1$

c) $\sqrt{2 - 5x} + x\sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 5} = 0$

13 Resuelve:

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$

b) $\sqrt{\dfrac{7x + 1}{4}} = \dfrac{5x - 7}{6}$

c) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 1} = 3$

Ecuaciones con la x en el denominador

14 Resuelve estas ecuaciones y comprueba la validez de las soluciones:

a) $\dfrac{x + 2}{x} + 3x = \dfrac{5x + 6}{2}$

b) $\dfrac{8}{x + 6} + \dfrac{12 - x}{x - 6} = 1$

c) $\dfrac{x - 2}{x - 1} = \dfrac{x^2}{(x - 1)(x - 2)} - \dfrac{x - 1}{2 - x}$

☛ *Ten en cuenta que* $2 - x = -(x - 2)$.

d) $\dfrac{x}{x - 6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{x + 6}{6 - x}$

e) $\dfrac{3x + 1}{x^3} + \dfrac{x + 1}{x} = 1 + \dfrac{2x + 3}{x^2}$

f) $\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}\,x$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

15 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x = \sqrt[3]{9}$

☛ *Expresa* $\sqrt[3]{9}$ *como potencia de base 3.*

b) $2^x \cdot 2^{x + 1} = 8$

☛ *Multiplica el primer miembro.*

c) $5 \cdot 7^{-x} = 35$

☛ *Divide los dos miembros por 5.*

d) $(0,5)^x = 16$

☛ *0,5 es una potencia de base 2.*

e) $\sqrt{7^x} = \dfrac{1}{49}$

f) $2^{1/x} = 16$

g) $\dfrac{3^{3x - 2}}{3^{x + 3}} = 81$

h) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \dfrac{8}{125}$

i) $2^x \cdot 5^x = 0,1$

☛ *Recuerda que* $2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

16 Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{e^x} = 27$ b) $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$ d) $\dfrac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

17 Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$ b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \dfrac{5}{2}$

c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \dfrac{17}{16}$ d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

e) $9^x - 3^x - 6 = 0$ f) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

18 Resuelve las ecuaciones:

a) $log\,(x^2 + 1) - log\,(x^2 - 1) = log\,\dfrac{13}{12}$

b) $ln\,(x - 3) + ln\,(x + 1) = ln\,3 + ln\,(x - 1)$

c) $2ln\,(x - 3) = ln\,x - ln\,4$

d) $log\,(x + 3) - log\,(x - 6) = 1$

19 Resuelve las ecuaciones:

a) $log\,(x + 9) = 2 + log\,x$

b) $log\,\sqrt{3x + 5} + log\,\sqrt{x} = 1$

c) $2(log\,x)^2 + 7\,log\,x - 9 = 0$

☛ *Haz* $log\,x = y$.

d) $log\,(x^2 - 7x + 110) = 2$

e) $log\,(x^2 + 3x + 36) = 1 + log\,(x + 3)$

f) $ln\,x + ln\,2x + ln\,4x = 3$

Sistemas de ecuaciones

20 Resuelve:

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

☛ *Suma las dos ecuaciones.*

d) $\begin{cases} (x + y)\,(x - y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

21 Resuelve:

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\sqrt{x + 1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{3\,(x + y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

22 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$

23 Resuelve:

a) $\begin{cases} log\,x + log\,y = 3 \\ log\,x - log\,y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} log_2\,x + 3log_2\,y = 5 \\ log_2\,\dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} log\,(x^2y) = 2 \\ log\,x = 6 + log\,y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ log\,x - log\,y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 25 \\ log\,y = log\,x - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} ln\,x - ln\,y = 2 \\ ln\,x + ln\,y = 4 \end{cases}$

Método de Gauss

24 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

25 Resuelve aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x \quad\;\; - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

26 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$

27 Resuelve aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

☛ *Encontrarás sistemas compatibles (determinados e indeterminados) y sistemas incompatibles.*

Inecuaciones

28 Resuelve estas inecuaciones:

a) $5(2 + x) > -5x$ b) $\dfrac{x - 1}{2} > x - 1$

c) $x^2 + 5x < 0$ d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$ f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

29 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

☛ *Resuelve cada inecuación y busca las soluciones comunes. Uno de los sistemas no tiene solución.*

30 Resuelve:

a) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ b) $x^2 - 7x + 6 > 0$

c) $(x + 1)\, x^2 (x - 3) > 0$ d) $x(x^2 + 3) < 0$

31 Resuelve estas inecuaciones:

a) $\dfrac{2}{x - 3} > 0$ b) $\dfrac{3x + 5}{x^2 + 1} \geq 0$

c) $\dfrac{x^2}{x + 4} < 0$ d) $\dfrac{x - 3}{x + 2} < 0$

PARA RESOLVER

32 Un inversor, que tiene 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8% y el resto en otro banco al 6%. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?

33 Dos grifos llenan un depósito de 1 500 litros en una hora y doce minutos. Manando por separado, el primero tardaría una hora más que el segundo. ¿Cuánto tardaría en llenar el depósito cada grifo por separado?

34 Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,45 € el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?

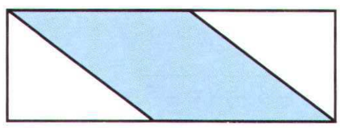
☛ *Iguala el coste de las docenas que se rompen a lo que aumenta el coste de las que quedan.*

35 Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kg por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilogramos compró?

☛ *Iguala el coste de las que se desechan más las ganancias al aumento de coste de las que quedan.*

36 Varios amigos toman un refresco en una terraza y deben pagar 6 € por el total de las consumiciones. Como dos no tienen dinero, los demás les invitan, debiendo aumentar su aportación en 0,80 € cada uno. ¿Cuántos amigos son?

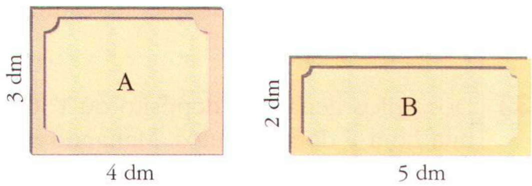
37 El cuadrilátero central es un rombo de 40 m de perímetro. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que la base es el triple de la altura.



38 El número de visitantes a cierta exposición durante el mes de febrero se incrementó en un 12% respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12% respecto a febrero. Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿cuántas personas vieron la exposición en enero?

39 La superficie de un triángulo equilátero es de 50 m^2. Calcula el lado.

40 Para cubrir el suelo de una habitación, un solador dispone de dos tipos de baldosas:



Eligiendo el tipo A, se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiera el tipo B. ¿Cuál es la superficie de la habitación?

41 En un número de dos cifras, las decenas son el triple de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, se obtiene otro número 54 unidades menor. Calcula el número inicial.

42 Le pregunté a mi padre: *¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?*

—No sé, nunca me he fijado.

—Pero hombre..., lo acabamos de tomar mamá, la abuela, mis dos hermanas, tú y yo. ¿Cuánto has pagado?

—Algo más de 14 euros.

—El domingo pasado, además de nosotros seis, invitaste a dos amigos míos. ¿Cuánto pagaste?

—Era poco menos de 20 euros, pues puse un billete y dejé la vuelta.

¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?

43 Resuelve:

a) $3x^4 - 75x^2 = 0$

b) $\sqrt{4x+5} = x + 2$

c) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2$

d) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x}{5(x+3)} = \dfrac{3}{10}$

e) $x \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

f) $(x^2 - 9)(\sqrt{x} + 3) = 0$

g) $(\sqrt{x} - x + 2)x = 0$

44 Resuelve:

a) $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| = 4$ b) $|x^2 - 1| = 3$

45 Resuelve estas ecuaciones de grado superior a dos en las que puedes despejar la incógnita:

a) $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{25}{9x^2} = 0$ b) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{2}{81x^3} = 0$

c) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x^2} = 0$ d) $\dfrac{2}{5x} - \dfrac{5x^3}{2} = 0$

e) $\dfrac{x+1}{x^2} - \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x^3+x^2} = 0$

46 Resuelve:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \sqrt{2y} \\ x + y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{4y+2x} = \sqrt{3y+x} - 1 \\ y + x = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$

47 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|x-5| = 3x - 1$ b) $|x+2| = |x-6|$

c) $|x^2 - 3x + 1| = 1$ d) $|x^2 - x| = |1 - x^2|$

48 Resuelve por tanteo:

a) $2^x = x^3$ b) $ln\, x = -x$

49 Resuelve por tanteo las siguientes ecuaciones, sabiendo que tienen una solución en el intervalo indicado:

a) $x^3 - x - 2 = 0$ en $[1, 2]$

b) $3x^3 + x^2 - 3 = 0$ en $[0, 1]$

50 Queremos repartir, mediante un sistema de ecuaciones, 330 euros entre tres personas de forma que la primera reciba 20 euros más que la segunda y la tercera la mitad de lo que han recibido entre las otras dos. ¿Cómo lo hacemos?

51 La suma de las tres cifras de un número es igual a 7. La cifra de las decenas es una unidad mayor que la suma de las otras dos.

Si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 99 unidades. ¿Cuál es ese número?

CUESTIONES TEÓRICAS

52 ¿Qué valores ha de tomar el parámetro k para que $x^2 - 6x + k = 0$ no tenga soluciones reales?

53 Halla m para que al dividir el polinomio

$$2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$$

entre $x + 4$, el resto sea igual a 12.

54 Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.

55 Justifica por qué este sistema de ecuaciones no puede tener solución:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

56 Invéntate ecuaciones que tengan por soluciones los valores:

a) $3, \ -3, \ \sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$ b) 5; 0,3 y -2

c) $0, \ \frac{1}{2}$ y 0,7 d) $0, \ 1, \ -1$ y $\frac{1}{3}$

PARA PROFUNDIZAR

57 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado en las que la incógnita es x:

a) $abx^2 - (a + b)\,x + 1 = 0$

☛ *Al aplicar la fórmula general, verás que el discriminante es un cuadrado perfecto:*

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

b) $(x - a)^2 - 2x\,(x + a) - 4a^2 = 0$

c) $ax^2 + bx + b - a = 0$

d) $(a + b)\,x^2 + bx - a = 0$

58 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^4 - 4x^2 < 0$ b) $x^3 - x^2 - 6x < 0$

c) $\dfrac{4 - x^2}{(x - 3)^2} > 0$ d) $\dfrac{-2}{(x - 1)^3} < 0$

59 Una vasija contiene una mezcla de alcohol y agua en una proporción de 3 a 7. En otra vasija la proporción es de 2 a 3. ¿Cuántos cazos hemos de sacar de cada vasija para obtener 12 cazos de una mezcla en la que la proporción alcohol-agua sea de 3 a 5?

AUTOEVALUACIÓN

1. Resuelve factorizando previamente.

$$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$$

2. Opera y simplifica el resultado.

$$\left(\frac{x^2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1}\right) : \frac{3x}{x - 1}$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $\sqrt{8 + 2x} - x = x + 6$

c) $\dfrac{3x}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{4}{3}$

d) $3^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

e) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

f) $\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x + 1)$

g) $|3x + 1| = |x - 3|$

4. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$

5. Resuelve:

a) $x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \geq 0$

6. La suma de las tres cifras de un número es igual a 7. La cifra de las decenas es una unidad mayor que la suma de las otras dos.

Si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 99 unidades. ¿Cuál es ese número?

3. y 4. En tu CD tienes una autoevaluación más amplia y las resoluciones de los ejercicios.

Autoevaluación

BLOQUE I: Aritmética y álgebra

1. De entre las ecuaciones siguientes:

$33x^2 - 25x + 2 = 0$ $\quad$ $2x^2 - 4 = 0$

$x^2 + x - 1 = 0$ $\quad$ $9x^2 + 4 = 0$

a) Señala las que no tienen soluciones en $\mathbb{Q}$.

b) ¿Cuáles tienen solución en $\mathbb{R}$?

2. Compara $\sqrt[3]{87}$ y $\sqrt[4]{386}$ reduciéndolas a índice común.

3. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$

b) $\dfrac{\sqrt{98} - \sqrt{18}}{\sqrt{96}} \cdot 30\sqrt{3}$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2}{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

4. Expresa el resultado de la siguiente operación con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido:

$$(5 \cdot 10^{-18})(3{,}52 \cdot 10^{15}) : (-2{,}18 \cdot 10^{-7})^2$$

5. Si $\log k = -1{,}3$ calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log k^3$ $\quad$ b) $\log \dfrac{1}{k}$ $\quad$ c) $\log \dfrac{k}{100}$

6. Halla x en cada caso:

a) $|7 - 3x| = 2$ $\quad$ b) $|x^2 - 3| = 1$

7. Calcula x para que $2^{x+1} = 3^x$.

8. Calcula la suma de los doce primeros términos de una progresión aritmética de la que conocemos $a_3 = 24$ y $a_2 + a_{11} = 41$.

9. Si al comienzo de cada año ingresamos 500 € en un banco al 4% anual, ¿cuánto dinero tendremos al final del quinto año?

10. Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos avanzados e indica su límite:

$a_n = \dfrac{3}{n^2}$ $\quad$ $b_n = 5 - \dfrac{1}{n}$

$c_n = \dfrac{n^2 + 1}{n}$ $\quad$ $d_n = \dfrac{4n - 5}{2n + 1}$

11. Simplifica la expresión del término general de la siguiente sucesión e indica su límite:

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

12. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 9x$ $\quad$ b) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$

13. Simplifica: $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x + 4)^2 - 7 = (2x + 3)^2 + 2x$

b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$

c) $\sqrt{2x + 3} - 2x = x - 6$

d) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$

15. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \le 9 \end{cases}$

16. Opera y simplifica:

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x}\right) - (x^2 - 3x)$$

17. Resuelve:

a) $\dfrac{7 - x}{x^2 + 4x + 4} + \dfrac{x}{x + 2} = 1$ $\quad$ b) $3^{x^2 - 2} = \dfrac{1}{3}$

c) $4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 16 = 0$

d) $\log (x + 1) = 1 + \log x$

18. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ \log (x + 1) = 1 + \log y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases}$

19. Resuelve: $x^2 + 4x + 3 \ge 0$

20. Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en dos horas. ¿Cuánto tarda cada grifo por separado?

En tu CD tienes las resoluciones de estos ejercicios.